Université Nangui Abrogoua | **République de Côte d'Ivoire**

Licence 1 : Mathématiques - Informatique | **Année Universitaire : 2020/2021**

Examen d'Analyse 3 (Session 1)

ECUE : Intégrales généralisés et Séries de fonctions

Durée : 1 heure 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

1. a. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dx$ converge.

   b. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dx$ à l'aide du changement de variable $x = t - \dfrac{1}{t}$.

2. a. Pour quel réel a la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\ln(n) + a\ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$ converge ?

   b. Pour cette valeur de a, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) + a\ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$.

EXERCICE 2:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \end{array}$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)dx$.

EXERCICE 3:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array}$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}}$.

   b. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

3. a. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$.

   b. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.